1. Отыскание точек локального экстремума функции. Достаточные условия экстремума.

Локальный максимум, минимум.  
Пусть функция f(x) определена всюду в некоторой окрестности точки с. Тогда эта функция имеет в точке с локальный максимум (минимум), если существует такая окрестность точки с, что для всех точек этой окрестности значение f(c) является наибольшим (наименьшим) среди всех значений f(x)

Лок. максимум и минимум – лок. экстремумы.

Необходимое условие экстремума – если функция дифф-ма и имеет экстремум в т. с, то f’(c) = 0.

Точки с такие, что f’(c) = 0 зовутся стационарными.

Первое достаточное условие экстремума.  
Теорема. Пусть f(x) дифф-ма всюду в некоторой окрестности точки с, и пусть точка с – стационарная. Тогда если в пределах указанной окрестности, f’(x) положительна (отрицательна) слева от точки с и отрицательна (соотв. полож) справа от точки с, то функция имеет в данной точке лок. максимум (соотв. минимум). Если же f’(x) имеет одинаковые знаки справа и слева от точки с в пределах заданной окрестности, то экстремума в точке с нет.

Доказательство.  
1) знаки разные. Раз функция дифференцируема, то все условия теоремы Лагранжа выполнены. И можно представить f(c) – f(x0) = f’(e)(c-x0) – отсюда видно, что f(c) – f(x0) всегда полож (отриц).  
2) знаки одинаковые – получаем по той же схеме f(c) – f(x0) знак меняет – экстр нет.

Второе достаточное условие экстремума.

Теорема. Пусть функция f(x) имеет в данной стационарной точке с конечную вторую производную. Тогда функция f(x) имеет в точке с локальный максимум, если вторая производная f(x) меньше ноля, или локальный минимум, если больше ноля.

Доказательство.   
То, что вторая производная больше ноля, означает, что f’(x) возрастает в точке c – а так как f’(c) = 0, то в некоторой окрестности слева f’(x) < 0, справа – больше – минимум. Для максимума аналогично.

5. Третье достаточное условие экстремума.

Пусть n >= 1 – некоторое нечетное число, и пусть функция y = f(x) имеет производную порядка n в некоторой окрестности точки с и производную порядка n+1 в самой точке. Тогда, если все производные в точке с степени до n+1 равны 0, а n+1 производная не равна 0, то функция имеет в точке локальный экстремум, а точнее, локальный максимум, если меньше 0 и минимум, если больше.

Доказательство.

Раскладываем f’(x) по формуле Маклорена до члена n-1 порядка. Остаточный член в форме Лагранжа. Получим, что знак f’(x) определяется знаком n-й производной в достаточно малой окрестности точки с. Ну а так как её знак слева и справа известен из положительности или отрицательности n+1 производной, приходим (по первой теореме) к минимуму или максимуму. Ну а благодаря нечетности, мы убрали влияние множителя (x – c)n-1 на знак результата.

Общая схема отыскания экстремума.

Предполагаем непрерывность функции на интервале – предполагаем существование и непрерывность её производной на интервале, кроме конечного числа точек – предполагаем конечное число обращений её в нуль на интервале – знак на участках интервала между этими точками определен – рассматриваем сами точки на экстремум

2.Направление выпуклости графика функции и точки перегиба. Достаточные условия перегиба.

Предположим, что функция дифференцируема в любой точке интервала. Тогда существует касательная, проходящая через любую точку (x, f(x)) этого графика, причем эта касательная не параллельна оси У.

График имеет выпуклость вниз (вверх) на интервале, если он на этом интервале лежит не ниже (не выше) любой своей касательной.

Теорема. Если функция имеет на отрезке вторую производную и эта производная неотрицательна (неположительна) всюду на этом интервале, то график имеет на нем выпуклость, направленную вниз (вверх).

Док-во.

рассмотрим случай >=0 – получаем уравнение касательной Y – f(c) = f’(c)(x-c), а саму функцию в окрестности точки с разложим по формуле Маклорена с ост членом Лагранжа: y = f(x) + f’(x)(x-c) + f’’(e)(x-c)2/2 Итого, разность координат графика и касательной равна y – Y = f’’(e)(x-c)2/2 ну и так как вторая производная неотрицательна, то график лежит не ниже касательной.

Теорема. Пусть вторая производная f(x) непрерывна и положительна (отрицательна) в точке с. Тогда существует окрестность точки с, в пределах которой график функции имеет выпуклость вниз (вверх).  
Док-во.  
По теореме об устойчивости знака непрерывной функции, найдется окрестность, в которой вторая производная всюду положительна (отрицательна) – по первой теореме там график имеет выпуклость вниз (вверх).

Точка М называется точкой перегиба, если существует окрестность т. М, где справа и слева от точки график имеет различные направления выпуклости.

Лемма 1. Пусть функция y = f(x) имеет производную всюду в б-окрестности точки с. Тогда, если график функции имеет на интервале (с, с+б) выпуклость, направленную вниз (вверх), то всюду в пределах данного интервала, этот график лежит не ниже (не выше) касательной в точке (с, f(c)).

док-во.  
рассматриваем сходящуюся последовательность к точке с, через каждую точку проводим касательную:  
Yn = f(xn) + f’(xn)(x-xn)  
Так как по условии, на интервале график выпукл вниз, то для любого n и для любой фиксированной точки интервала, f(x) – Yn >= 0 (<=0)  
Из условия непрерывности f’(x) в точке с, получим, что существует предел этой разности и он также >=0 (<=0).

Лемма 2. Пусть функция имеет производную в некоторой окрестности точки с, производная непрерывна в самой точке с. Тогда, если в точке с есть перегиб, то график справа и слева от неё лежит по разные стороны от касательной.  
док-во. выбираем малые окрестности и применяем лемму 1 на них – получаем условие.

Теорема. Если функция имеет в точке с вторую производную и график функции имеет перегиб в данной точке, то f’’(x) = 0.

Док-во. Так как там перегиб, то по лемме 2, f(x) – Y (Y – кас-я в точке с) имеет разные знаки слева и справа от точки с – значит экстремума F(x) нет. (F = f(x) – Y)  
Теперь предположим, что f’’(x) не равно 0. Тогда так как F’(x) = f’(x) – f’(c) , то F’’(x) = f’’(x) и получается что F’(c) = 0, но F’’(c) не равно 0 и значит F(x) имеет локальный экстремум в точке с. Противоречие!

Первое достаточное условие перегиба.   
Теорема. Пусть функция имеет вторую производную в некоторой окрестности точки с и вторая производная в точке с равна 0. Тогда если в окрестности точки с, вторая производная имеет разные знаки слева и справа от неё, то график этой функции имеет перегиб в точке М(с, f(c)).

Док-во. График имеет касательную, а также слева и справа вторая производная имеет разные знаки – а значит и разное направление выпуклости. По определению, это точка перегиба.

Второе достаточное условие перегиба.   
Если функция имеет в точке с третью производную и f’’(с) = 0, но f’’’(с) не равно 0, то график имеет перегиб в точке M(c,f(c)).   
Док-во. так как f’’’(c) не равно 0, то функция либо убывает, либо возрастает – из того что f’’(c) =0, получаем что слева и справа в некоторой окрестности разные знаки. По предыдущей теореме, есть перегиб.

Третье достаточное условие перегиба.

Теорема. Пусть n >= 2 – некоторое четное число и функция имеет производную порядка n в окрестности точки c и n+1 в самой точке. Тогда если f’’(c) =… f(n)(c) = 0, f(n+1)(c) <> 0, то график имеет перегиб в точке М (c,f(c)).

Док-во. f(n)(x) слева и справа имеет разные знаки. Раскладываем по формуле Тейлора f’’(x) и получим что она равна f(n)(e)(x-c)n-2/(n-2)! а так как f(n) справа и слева имеет разные знаки, то и f’’(x) тоже. По первой теореме получаем перегиб.

3.Асимптоты графика функции. Общая схема исследования графика функции.

Говорят, что х = а является вертикальной асимптотой графика функции, если lim f(x) при x -> a + 0 или x -> a - 0 равен плюс или минус бесконечности.

Говорят, что прямая y = kx + b является наклонной асимптотой графика функции при x -> +∞, если f(x) представима в виде f(x) = kx +b + a(x), где lim а(х) = 0 при x -> +∞

Теорема. Для того, чтобы график функции y = f(x) имел при x -> +∞ наклонную асимптоту, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела

Док-во. Необходимость  
Асимптота есть – получаем, что

Достаточность.  
Пусть существуют пределы. Второй предел означает, что разность f(x) – kx – b является бесконечно малой при x -> +∞ . Обозначим её через a(x) и получим условие.

Схема исследования графика функции.   
1. Уточнить область задания функции.  
2. Выяснить вопрос о существовании асимптот  
3. Найти области возрастания/убывания функции и точки экстремума  
4. Найти области сохранения направления выпуклости и точки перегиба  
5. Найти точки пересечения графика функции с осью Ох

4. Понятие интегрируемости функции. Леммы Дарбу о верхней и нижней суммах

Опр. 1. Задано разбиение сегмента [a,b], если заданы точки a = x0<x1<x2<…<xn=b   
Обозначается {xk}

Опр. 2. Разбиение {xk’} называется измельчением разбиения {kk} (того же сегмента), если каждая точка xp разбиения {xk} совпадает с одной из точек xq разбиения {xk’}.

Опр. 3. Разбиение {kk} называется объединением разбиений {kk’} и {kk’’} (того же сегмента), если все точки {kk’} и {kk’’} являются точками разбиения {kk} и других точек {kk} не содержит.

Интегральная сумма σ(xk,ξk) = , где ξk – некоторая точка сегмента [xk-1,xk].

Можно записать проще, σ(xk,ξk) =

Сегменты [xk-1,xk] – частичные сегменты, ξ – промежуточные точки.

d = max∆xk – диаметр разбиения.

Опр. 4. I – предел интегральных сумм σ(xk,ξk) при стремлении d к 0, если для любого ε > 0 существует такое δ>0, что из условия d < δ следует |I – σ| < ε.

Опред. 5. Функция f(x) интегрируема по Риману на сегменте [a,b], если для неё на указанном сегменте существует предел I её интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю.

Число I называется определенным интегралом Римана от функции f(x) в пределах от a до b и обозначается символом

a – нижний предел интегрирования, b – верхний.

Верхние и нижние суммы

M и m – верхняя и нижняя грани функции f(x) на сегменте [xk-1,xk]

Опр.1 Суммы

S = M1∆x1 + M2∆x2 + … + Mn∆xn =

s = m1∆x1 + m2∆x2 + … + mn∆xn =

Называются верхней и нижней суммами функции f(x) для данного разбиения {xk} сегмента [a,b].

Лемма 1. Пусть σ – интегральная сумма, отвечающая данному разбиению {xk}. Тогда при любом выборе промежуточных точек, всегда s <= σ <= S (s и S – верхняя и нижняя суммы)

Док-во. По определению mk и Mk, mk <= f(ξk) <= Mk для любого кси из данного сегмента. Умножаем на ∆xk и суммируем – получаем что надо.

Лемма 2. В произвольном разбиении, можно выбрать промежуточные точки так, что 0 <= S – σ(xkξk) < ε и так, что что 0 <= σ(xkξk) – s < ε

Док-во. Так как Mk = supf(x) на промежутке [xk-1,xk], то для выбранного ε найдется ξk (этого же сегмента) такая что 0 <= Mk – f(ξk) < ε/(b-a) – умножаем обе части на ∆xk, суммируем и получаем то что надо. Для s аналогично.

Следствие: S = supσ(xk,ξk); s = infσ(xk,ξk).

Лемма 3. При измельчении разбиения, верхняя сумма не увеличивается, нижняя не уменьшается.

Док-во. Добавим только одну точку – все отрезки разбиения, кроме одного, останутся неизменными – на этом отрезке образуется два новых, на каждом из них макс Mk, как и mk будет не больше (не меньше) того что было. Умножаем на дельта, суммируем, опять получаем то что надо.

Лемма 4. Для двух разбиений (разных) s <= S всегда.

Вводим объединение двух разбиений, это будет измельчением каждого. Для него справедливо s<=S – транзитивностью приходим к нужному неравенству.

Опр2. Верхним (нижним) интегралом Дарбу называется число I\* (I\*), равное точной нижней (верхней) грани множества верхних (нижних) сумм {S} ({s}) данной функции f(x) для всевозможных разбиений сегмента [a,b].

Лемма 5. Нижний интеграл Дарбу всегда не превосходит верхний интеграл Дарбу.

Док-во от противного:

Пусть I\* > I\*. Тогда их разность эпсилон – больше 0. Для выбранного разбиения, найдется верхняя сумма S’, меньшая I\*+ε/2 (по определению нижней грани). Так же получаем нижнюю сумму s’’ (уже от другого разбиения) – находим их разность S’ – s’’ < I\*-I\* + ε Но мы приняли что I\*-I\* = -ε ! Тогда нарушается 4 лемма и 5 лемма доказана.

Лемма 6. M и m – верхняя и нижняя грани функции на сегменте [a,b]. d – диаметр разбиения {xk}. Добавлением l произвольных точек получили разбиение {xk’}. Их верхние и нижние суммы соответственно S, s, S’, s’. Справедливо неравенство S – S’ <= (M-m)ld, s’-s <= (M-m)ld.

Док-во. Рассмотрим добавление одной точки. Тогда в суммах изменится ток одно слагаемое - Mk∆xk распадется на два (Mk’ и Mk’’), S – S’ = Mk∆xk – (Mk’(c – xk-1) + Mk’’(xk – c)). Ну а так как m<=Mk’’ и M’ тоже, то, заменяя М со штрихами на m получим S-S’ <= (M – m)∆xk <= (M-m)d.

Для нижних аналогично.

Определение 3. Число А – предел верхних сумм S при d стремящимся к 0, если для любого эпсилон больше 0 есть дельта что при любом d меньше дельта, |S-A| < ε. Ну все как обычно.

Аналогично для нижних сумм.

Основная лемма Дарбу. Верхний интеграл Дарбу – предел верхних сумм при стремлении диаметра разбиения к 0. Аналогично для нижнего интеграла Дарбу.

Док-во. Если f(x) = const то S = I\* в любом разбиении..

Если непостоянна, то делаем вот что:

1) фиксируем малое ε

2) По определению I\*, существует разбиение, в котором S\*-I\* < ε/2.

3) Обозначим количество точек (не совпадающих с a и b) этого разбиения за l

4) берем произвольное разбиение, диаметр которого d < δ = ε/(2l(M-m)), S – его верхняя сумма

5) Измельчаем его, добавляя l точек из п. 3), полученная верхняя сумма S’ удовлетворяет неравенству 0 <= S – S’ <= (M-m)ld < ε/2

6) Можно рассматривать последнее разбиение как измельчение самого первого разбиения с добавленными точками второго разбиения, поэтому в силу определения и леммы 3 получаем:

I\*<=S’<=S\* то есть 0 <= S’ – I\* < S\* - I\*

Ну а так как S\* - I\* < ε/2, 0 <= S’ – I\* < ε/2 Обобщая всё, получим 0 <= S – I\* < ε если d меньше дельта. Получаем что хотели.

5. Необходимое и достаточное условие интегрируемости.

Вспомогательная теорема. Ограниченная на сегменте [a,b] функция интегрируема титтк I\*=I\*

Док-во.

Н. Ф-я интегрируема -> существует предел I интегральных сумм при стремлении d к нулю -> для любого ε>0, существует δ>0 такое что при любых промежуточных точках ξk и d < δ, |I-σ(xk,ξk)|<ε/4

По лемме 2 можно в этом же разбиении выделить точки ξ k’ и ξk’’ такие что разность между инт суммами от них, S и s меньше ε/4 – первое неравенство с ними также справедливо. А теперь фокус S – s = [S – σ’] + [σ’ – I] + [I – σ’’] + [σ’’ – s] < ε ! И так как s <= I\* <= I\* <= S и ε – любая, I\*=I\*

Д. I\*=I\* -> по основной лемме Дарбу, верхний интеграл – предел верхних сумм, нижний – предел нижних. Потому для любого ε>0, существует δ>0 такое что для любых разбиений с d < δ, разность между ними меньше эпсилон. Отсюда, A – ε < s <= σ <= S < A + ε где A = I\* = I\*  
Получаем |A – σ|<ε значит предел инт сумм существует и равен A – функция интегрируема.

Основная теорема.

Ограниченная на [a,b] функция интегрируема титтк для любого ε можно найти разбиение, в котором S – s < ε.

Н. Функция интегрируема – из док-ва вспом. теоремы – S – s < ε

Д. S – s < ε, s <= I\* <= I\* <= S , значит из вспомог. теоремы (интегралы совпадают), ф-я инт-ма.

6. Классы интегрируемых функций.

теорема. Непрерывные на сегменте [a,b] функции интегрируемы на нем.

Док-во. функция непрерывна на сегменте – она равномерно непрерывна на нем., значит для любого ε существует δ такая что если ξ’ и ξ’’ – любые точки сегмента для которых модуль разности меньше дельты, то |f(ξ’) – f(ξ’’)|< ε/(b-a) – получается что разность между точной верхней и нижней гранью на любом сегменте длины меньше дельта, будет меньше ε/(b-a). Теперь выберем разбиение этого сегмента с диаметром d меньше дельта. Mk – точная верхняя грань f(x) на сегменте [xk-1,xk], m –аналогично точная нижняя. По определению верхней и нижней суммы, S – s = сумма (Mk-mk)∆xk – используем то что разность меньше ε/(b-a) , суммируем и получаем что S – s меньше эпсилон – по основной теореме, функция интегрируема.

теорема. Пусть f(x) определена и ограничена на сегменте [a,b]. Если для любого эпсилон можно покрыть точки разрыва интервалами, общая сумма длин которых меньше эпсилон, функция интегрируема на этом сегменте.

Док-во. Покроем точки разрыва интервалами длины ε/[2(M-m)]. Остальные сегменты назовем дополнительными. На каждом из них, функция непрерывна, а значит и равномерно непрерывна. Значит выполняется условие равномерной непрерывности. Возьмем за дельту минимальную из всех дельт для всех доп. Сегментов. Тогда она будет подходить каждому из них и разность Mk – mk < ε/2(b-a). Получаем для всего сегмента S – s = сумма’ (Mk – mk)∆xk + сумма’’(Mk – mk)∆xk где сумма’ содержит все промежутки покрывающие разрывы, а сумма’’ содержит все дополнительные сегменты. Рассмотрим первое слагаемое. Так как Mk – mk < M-m, то можно его заменить и получится сумма’ (Mk – mk)∆xk <= (M-m)сумма’∆xk < ε/2.

Аналогично, сумма’’(Mk – mk)∆xk < сумма’’∆xk ε/2(b-a) < (b-a)\*ε/2(b-a) = ε/2.

Таким образом, S – s < ε и по основной теореме, функция интегрируема.

Следствие. Ограниченная на сегменте функция с конечным числом точек разрыва интегрируема на нем.

Замечание. Если интегрируемая функция f(x) отличается от g(x) на сегменте [a,b] лишь конечным числом точек, то g(x) тоже интегрируема и интеграл на этом сегменте равен интегралу f(x).

Теорема. Монотонная на сегменте функция интегрируема на нем

Константу убираем, это примитивно. Например, функция не убывает. Берем разбиение сегмента [a,b] с диаметром d < ε/(f(b)-f(a)) – получаем S –s < ε\*сумма(Mk-mk)/(f(b)-f(a)) – последнее в силу монотонности становится единицей и получаем эпсилон.

Теорема. Пусть f(x) интегрируема на сегменте [a,b], M и m – точные грани, g(x) определена на [m,M] и удовлетворяет условию Липшица: существует С такое что для любых x и y из [m,M] выполняется |g(x)-g(y)| <= C|x-y|. – Тогда сложная функция h(x) = g(f(x)) интегрируема на сегменте [a,b].

Док-во. Так как f(x) интегрируема, есть разбиение, в котором S-s < ε/C пусть Mk и mk – точные грани на частичном отрезке разбиения, а Mk\* и mk\* соответствующие величины для h(x). Тогда в силу условия на функцию g(x) справедливо неравенство h(x) – h(y) <= |h(x) – h(y)| = |g(f(x)) – g(f(y))| <= C|f(x) – f(y)| <= C(Mk – mk). – это справедливо для любых точек, поэтому справедливо и Mk\* - mk\* <= C(Mk – mk) Получаем что S\* - s\* = сумма (Mk\* - mk\* )∆xk <= C(S – s) < ε – по основной теореме, функция интегрируема.

Теорема. Пусть f(x) интегрируема на сегменте [a,b], M и m – точные грани, g(x) непрерывна на [m,M] – Тогда сложная функция h(x) = g(f(x)) интегрируема на сегменте [a,b].

Док-во.

Пусть C = max |g(t)| на сегменте [m,M] и ε – произвольное положительное число. Возьмем ε’ = ε/(b-a+2C). В силу непрерывности g, существует δ > 0 такое что |g(t1)-g(t2)| < ε’ если |t1 – t2| < δ  
и t1 и t2 принадлежат [m,M]. Выберем δ таким что он еще меньше ε’. В силу интегрируемости f(x), существует такое разбиение, что S – s < δ2

Mk, mk – точные грани f(x) на [a,b] M\*k, mk\*- точные грани h(x) на [a,b]. Разобьем натуральные числа 1..n да два множества – в первом все k для которых Mk – mk < δ, во втором – все для которых больше либо равно. Для индексов первой группы, в силу равномерной непрерывности g(t) получаем Mk\* - mk\* <= ε’ и в силу равномерной непрерывности на всем сегменте, |g(f(x)) – g(f(y))| = |g(t1) – g(t2)| < ε’ - так как это для любых x и y то точные верхние и нижние грани тоже подходят.

А если k из второй группы, то очевидно что Mk\* - mk\* <= 2С. Теперь смотрим разность S\* – s\* = ε’(b-a) + 2C\*сумму(по вторым к)∆xk   
Оцениваем последнюю сумму. Она меньше суммы(по второй группе) δ(Mk – mk)∆xk <= суммы общей = S –s <δ2

Получаем что в общем она меньше дельта, которая в свою очередь меньше ε’ – выносим его и получаем S\* - s\* <= ε’(b-a) + 2Cε’ < ε’(b-a+2C) = ε – функция интегрируема…

Если вы абсолютно не поняли, как доказывать теорему – не беспокойтесь. Я тоже не понял ☺ Будем называть эту теорему «ужасной». Кстати,Тихомиров в своей лекции пишет об этом так:

«Замечание к теореме 6». Теорема 6 остается справедливой, если условие Липшица для g(t) заменить на условие непрерывности g(t) на [m,M] – то есть он это даже не пытался объяснить!!!

Ладно, переходим к теме

7. Свойства определенного интеграла. Оценки интегралов. Теоремы о среднем значении.

Свойства интеграла:

а) интеграл от суммы интегрируемых функций равен сумме интегралов от этих функций – доказываем через суммы.

б) интеграл от произведения суммы на константу равен произведению константы на интеграл от функции – аналогично просто выносим константу из суммы

в) произведение интегрируемых функций – тоже интегрируемая функция –4 f(x)g(x) = (f(x)+g(x))2 – (f(x)-g(x))2 – по предыдущим свойствам и ужасной теореме, правая часть интегрируема, значит и левая тоже.

г) Раз функция интегрируема на [a,b] то она интегрируема и на любом [c,d], входящим в [a,b].  
док-во. Берем разбиение [a,b], добавляем в него точки c и d – получаем общее разбиение, для него S – s меньше эпсилон, как и для изначального разбиения. Теперь из S и s выбираем слагаемые, относящиеся только к отрезку [c,d] – из них тоже смотрим S’ – s’ и оно тоже меньше эпсилон, так как первая разность содержит вторую как слагаемое, остальные слагаемые неотрицательны, значит вторая разность меньше первой!

интеграл по [a,b] равен минус интегралу по [b,a].

д) Если f(x) инт-ма на [a,c] и [c,b], то она интегрируема и на [a,b], причем сумма интегралов по первым отрезкам равна интегралу по второму отрезку.

1) если точка с находится вне сегмента [a,b] - какой то из них находится внутри другого – по предыдущему свойству все норм

2) если точка с внутри сегмента [a,b] то берем разбиения двух отрезков [a,c] и [c,b], в них S – s < ε/2 объединяем – в объединении S – s < ε – на этом отрезке интегрируема. Насчет результата смотрим суммы интегралов по двум разбиением, объединяем в общую и получаем общий интеграл.

Оценки интегралов.

а) если функция интегрируема на сегменте и неотрицательна на нем – её интеграл на этом сегменте неотрицателен.

док-во – каждая инт.сумма будет неотрицательна, предел тоже.

б) Если f(x) и g(x) интегрируемы на сегменте и f(x) <= g(x) на нем то и интеграл от f(x) будет меньше интеграла от g(x). док-во – рассматриваем интеграл разности и смотрим пред. свойство.

в) Если функция непрерывна и неотрицательна на сегменте и есть хоть одна точка сегмента, в которой функция положительна, интеграл тоже положителен. Док-во – находим такой окрестность точки где ф-я положительна 0 отрезок [c,d] – на котором функция не меньше половины макс значения δ – интеграл на [a,b] не меньше интеграла на [c,d] который не меньше интеграла на [c,d] функции δ/2 – всегда больше 0.

г) Если функция интегрируема – то и модуль функции интегрируем и модуль интеграла всегда не больше интеграла модуля функции.

Док-во. По теореме перед ужасной, модуль функции интегрируем (он удовлетворяет условию Липшица) – выбираем константу α из условия 1 или -1 так чтоб альфа на интеграл было неотрицательным. очевидно что αf(x) <= |αf(x)| <=| f(x)| - из этого и выводим то что надо.

Первая формула среднего значения

Пусть каждая из функций f(x) и g(x) интегрируема на [a,b] Тогда найдется число m <= u <= M и такое что справедлива формула

А если f(x) непрерывна то u = f(ξ). Кси из того же сегмента.

Док – во.

m<= f(x) <= M, пусть g >= 0; умножаем на g(x) -> mg(x)<= f(x)g(x) <= Mg(x) – интегрируем всё это дело и получаем два случая – интеграл от g(x) больше нуля или равен 0. Если равен то средний интеграл тоже 0 и можно выбрать любое u. Если не равно то делим на интеграл от g(x) получаем что m <= {интеграл от f(x)g(x) деленный на интеграл от g(x)} <= M – среднюю шнягу и берем за u.

Следствие – если g(x) = 1 то интеграл выходит равным u(b-a) – а если f(x) непрерывна то ваще клёво!

Вторая формула среднего значения. (Тихомиров её не доказывал нам и я не буду ☺)

Пусть f(x) интегрируема, а g(x) монотонна на сегменте [a,b]. Тогда на этом сегменте найдется кси такая что

8. Основная формула интегрального исчисления. Формулы замены переменной и интегрирования по частям.

Теорема. Если f(t) – интегрируема на [a,b] и с лежит на этом отрезке, то F(x) = – непрерывна.

Док-во. Пусть ∆F(x) = F(x+∆x) – F(x) = = {теорема о среднем} = u∆x – разностная форма непрерывности функции.

Теорема. Пусть f(x) интегрируема на [a,b] и непрерывна в т. х из [a,b]. Тогда f(x) дифференцируема в т. х и F(x)’ = f(x).

Доказательство – смотрим ∆F(x)/∆x =( F(x+∆x) – F(x) )/ ∆x – получаем из прошлого доказательства и теоремы о среднем (u = f(ξ), кси из отрезка [x,x+∆x]) – получаем что это равно f(ξ) – при стремлении ∆x к нулю, это стремится к f(x)! (доказательство обработано мной для лучшего понимания).

Теорема (формула Ньютона – Лейбница).

Если F(x) = , а Ф(х) – любая другая первообразная f(x), то F(x) – Ф(х) = С, т.е. Ф(x) = + С – по пред. теореме. Подставим в Ф сначала a, потом b и найдем разность. Константы сократятся и получаем

Замена переменной.

Пусть x = g(t) имеет непрерывную производную на [m,M] и min g(t) = a, max g(t) = b, причем g(m) = a, g(M) = b тогда при условии непрерывности f(x) на [a,b].

Док-во.

Пусть Ф(х) – некоторая первообразная f(x), функции Ф(х) и x = g(t) дифференцируемы на [a,b] и [m,M] соответственно. Поэтому d/dt Ф(g(t)) = Ф’(g(t))g’(t).

Заметим, что производная Ф’(g(t)) = Ф’(x), x = g(t), Ф’(x) = f(x)

В итоге, d/dt Ф(g(t)) = f(g(t))g’(t). Таким образом, функция Ф(g(t)) является первообразной для f(g(t))g’(t). И = Ф(g(M)) – Ф(g(m)) = Ф(b) – Ф(a) =

Интегрирование по частям.

Пусть функции f(x) и g(x) имеют непрерывные производные на сегменте [a,b] тогда

Доказательство – находим производную произведения функций, берем интегралы от обоих частей.